LAHENDUSED 12.KLASS

1. **Vastus: Esimest tüüpi kanistrid mahutavad kokku 640 liitrit vedelikku ja teist tüüpi kanistrid mahutavad kokku 60 liitrit vedelikku**

Lahendus:

Olgu meil esimest tüüpi kanistreid x tükki, igaüks mahutavusega A liitrit ja teist tüüpi kanistreid y tükki, igaüks mahutavusega B liitrit $(A \neq B)$. Seega saame võrrandi $x \cdot A + y \cdot B = 700$. Kui kõik kanistrid oleks esimest tüüpi oleks neid $x + y$, ning nad mahutaksid kokku $(x + y) \cdot A = 700 + 100$. Kui kõik kanistrid oleks teist tüüpi oleks neid $x + y$, ning nad mahutaksid kokku $(x + y) \cdot B = 700 - 400$. Oleme saanud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x \cdot A + y \cdot B = 700 \\ (x + y) \cdot A = 800 \\ (x + y) \cdot B = 300 \end{cases}$$

Lahutades esimesest võrrandist teise, saame $yB - yA = -100$ ning esimesest võrrandist kolmanda, saame $xA - xB = 400$. Neist omakorda saame süsteemi $\begin{cases} y \cdot (A - B) = 100 \\ x \cdot (A - B) = 400 \end{cases}$.

Siit $y = \frac{x}{4}$ ja $x = 4y$.

Nüüd saame esialgse võrrandisüsteemi teisest võrrandist $\frac{5x}{4} \cdot A = 800$, ehk $x \cdot A = 640$ ja kolmandast võrrandist $5y \cdot B = 300$, ehk $y \cdot B = 60$.

Vastus: Esimest tüüpi kanistrid mahutavad kokku 640 liitrit vedelikku ja teist tüüpi kanistrid mahutavad kokku 60 liitrit vedelikku.

Hindamine:

Võrrandisüsteemi koostamine	3p
Kanistrite arvu suhte leidmine	2p
Kumbagi tüüpi kanistrite kogumahutavuse leidmine	2p

2. Vastus: **a) SÜT(B, C) = 45. b) m = 199, n = 99.**

Lahendus:

a) Leiame summad
$A = 0 + 1 + \ldots + 9 = 45$,

$B = 10 + 11 + \ldots + 99 = (10 + 99) : 2 \cdot 90 = 109 \cdot 45$,

$C = 100 + 101 + \ldots + 999 = (100 + 999) : 2 \cdot 450 = 10990 \cdot 45$.

Kuna SÜT(109, 10990) = 1, siis SÜT(B, C) = 45.

b) Lahenduse esimese osa põhjal $B = 109 \cdot A$ ja $C = 10990 \cdot A$ ning võrdus

$C = m \cdot A + n \cdot B$ teiseneb kujule $10990 \cdot 45 = m \cdot 45 + n \cdot 109 \cdot 45$,

millest $10990 = m + n \cdot 109$.

Et $m = n + 10^k$, siis saame võrduse $10990 = 10^k + n \cdot 110$.

Juhtudel $k = 0, 1$, osutub n murdarvuks. Kui $k = 2$, siis

saame, et $10990 - 100 = n \cdot 110$, millest $n = 99$ ja $m = 99 + 100 = 199$.

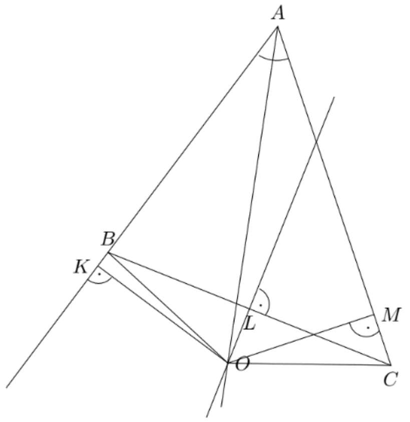
Teostades kontrolli, saame et $m \cdot A + n \cdot B = 199 \cdot 45 + 99 \cdot 109 \cdot 45$ on tõepoolest võrdne arvuga $C = 10990 \cdot 45$.

Hindamine:

a) Leitud SÜT(B, C) = 45	3p
b) Saadud avaldis kas m või n määramiseks	1p
Vähima sobiva $k = 2$ leidmine	1p
m ja n väärtuste leidmine	2p

3. Vastus: ***BK*=(*AC*– *AB*) : 2.**

<u>Lahendus:</u>



Lahenduses tähistab sümbol *AB* nii lõiku kui ka selle pikkust

Tõmbame punktist *O* ristsirge küljele *AC*. Olgu nende lõikepunkt *M.* Vaatame täisnurkseid kolmnurki *AKO* ja *AMO*. Et nurgapoolitaja *AO* on ühiseks hüpotenuusiks ja $\angle BAO = \angle CAO$, siis on need kolmnurgad võrdsed ning *AM* = *AK* = *AB* + *BK* ja *OK* = *OM*.

Olgu *L* külje *BC* keskpunkt. Kolmnurgas *BOC* on keskristsirge lõik *OL* nii kõrguseks kui ka mediaaniks, st, et täisnurksed kolmnurgad *BLO* ja *CLO* on võrdsed ja *BO* = *CO*.

Et täisnurksetes kolmnurkades *BKO* ja *CMO* on kaks külge vastavalt võrdsed (*OK* = *OM* ja *BO* = *CO*), siis on võrdsed ka kolmandad küljed *BK* = *CM*.

Seega, *AC* = *AM* + *MC* = (*AB* + *BK*) + *BK* = *AB* + 2 · *BK*, millest saame, et

BK = (*AC*– *AB*) : 2.

<u>Hindamine:</u>

Tehtud õige joonis	1p
Tehtud lisakonstruktsioon (ristlõik *OM*)	1p
Näidatud, et *AM* = *AK* ja *OK* = *OM*	2p
Näidatud, et *BO* = *CO*	1p
Näidatud, et *BK* = *CM*	1p
Avaldatud *BK* = (*AC*– *AB*) : 2	1p

4. Vastus: $M\left(0; 1\frac{3}{4}\right)$.

Lahendus:

Tähistame otsitava punkti $M\,(0; p)$. Olgu ühe puutuja tõus k ning kuna teine puutuja on sellega risti, on tema tõus $-\frac{1}{k}$. Puutujate võrrandid on vastavalt $y = kx + p$ ja $y = -\frac{1}{k}x + p$. Kasutame ära teadmise, et kummalgi puutujal on parabooliga üks ühine punkt, ehk võrranditel $x^2 - 2x + 3 = kx + p$ ja $x^2 - 2x + 3 = -\frac{1}{k}x + p$ on ainult üks lahend.

Võrrandi $x^2 - 2x + 3 = kx + p$ viime kujule $x^2 - (2 + k)x + 3 - p = 0$. Et sellel oleks üks lahend, peab kehtima tingimus $(2 + k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - p) = 0$. Samamoodi viime teise võrrandi $x^2 - 2x + 3 = -\frac{1}{k}x + p$ kujule

$x^2 - \left(2 - \frac{1}{k}\right)x + 3 - p = 0$, kust sarnaselt eelmisega saame tingimuse

$\left(2 - \frac{1}{k}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - p) = 0$.

Võrrandisüsteemist

$\begin{cases} (2 + k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - p) = 0 \\ \left(2 - \frac{1}{k}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - p) = 0 \end{cases}$ jõuame asendusvõttega võrrandini

$(2 + k)^2 = \left(2 - \frac{1}{k}\right)^2$. Avades sulud ja laiendades võrrandit teguriga $k^2 \neq 0$, saame

$k^4 + 4k^3 + 4k - 1 = 0$

$k^4 - 1 + 4k^3 + 4k = 0$

$(k^2 - 1)(k^2 + 1) + 4k(k^2 + 1) = 0$

$(k^2 + 1)(k^2 + 4k - 1) = 0$

Alternatiiv:
$2 + k = 2 - \frac{1}{k}$ või $2 + k = -2 + \frac{1}{k}$

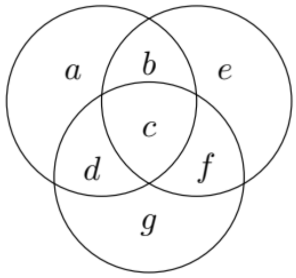
Esimene tegur ei ole 0, seega $k^2 + 4k - 1 = 0$, kust $k_1 = -2 + \sqrt{5}$ ja $k_2 = -2 - \sqrt{5}$

Asendades need eelpooltoodud võrrandisüsteemis olevasse esimesse võrrandisse, saame mõlemal juhul $p = 1\frac{3}{4}$ ehk otsitav punkt y-teljel on $M\left(0; 1\frac{3}{4}\right)$.

Hindamine:

Otsitava y-telje punkti koordinaadi tähistamine ja ristuvate puutujate võrrandite kirjeldamine (nt eelpooltoodud kujul $y = kx + p$ ja $y = -\frac{1}{k}x + p$)	2p
Võrranisüsteemi koostamine	2p
Märkus, et sirgel ja paraboolil üks ühine punkt, st vastavate ruutvõrrandite diskriminandid on nullid	1p
Võrrandisüsteemi lahendamine (k ja p leidmine)	2p

5. Vastus: a) 13 b) Ei ole



Lahendus:

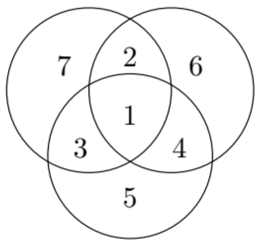
Tähtedega a, b, c, d, e, f ja g on tähistatud erinevatesse piirkondadesse paigutatud arvud 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja 7 mingis järjekorras. Et igas ringis paikneva nelja arvu summa on S, saame, et

$$a+b+c+d=S$$
$$b+c+e+f=S$$
$$c+d+f+g=S$$

Liites saadud kolme võrduse vastavad pooled ja arvestades et $a+b+c+d+e+f+g=1+2+3+4+5+6+7=28$ saame võrduse $(a+b+c+d+e+f+g)+b+d+f+2c=28+b+d+f+2c=3S$.
Kui S on vähim võimalikest summadest, siis on vähim võimalikest ka kolmekordne summa 3S. Et kõik paigutatavad arvud on naturaalarvud, siis omandab $3S$ vähima väärtuse kui summa $b+d+f+2c$ on vähim võimalikest summadest. See on võimalik vaid siis, kui $c = 1$ ning b, d ja f on arvud 2, 3 ja 4 mingis järjekorras. Sel juhul $b+d+f+2c=2+3+4+2\cdot1=11$ ning $3S = 28 + 11 = 39$ ja vähim võimalik summa oleks $S = 39 : 3 = 13$.
Näitame, et selline arvude paigutus on tõepoolest ka võimalik. Kui $c = 1$ ja näiteks $b = 2$, $d = 3$ ja $f = 4$, siis ülaltoodud võrduste süsteem omandab kuju

$$a+2+1+3=13$$
$$2+1+e+4=13$$
$$1+3+4+g=13$$

millest saame, et $a=7, e=6$ ja $g=5$. Olemegi saanud antud seitsme arvu nõutud paigutuse nagu joonisel näidatud.



b) Kui $S = 21$, siis ülalpool saadud võrduse põhjal $(a+b+c+d+e+f+g)+b+d+f+2c=28+b+d+f+2c=3\cdot21$,
millest järeldub, et $b+d+f+2c=63-28=35$.
Kahjuks ei ole võimalik arvude 1 kuni 7 seast valida nelja sellist, et saaksime summaks 35, sest suurim võimalik summa väärtus oleks
$b+d+f+2c=4+5+6+2\cdot7=29$.

Hindamine:

a) Kasutatud tähistuste abil saadud arve siduvad võrdused 2p

Põhjendatud, miks vähima summa saamiseks peavad mitmes ringis paiknevad arvud olema võimalikest vähimad 1p

Leitud vähim summa 13 ja näidatud, et selline paigutus on võimalik 2p

b) Näidatud, et summa 21 ei ole võimalik 2p

Märkus: Kui ilma selgitusteta on öeldud, et vähim summa on 13 ja näidatud, et selline paigutus on võimalik, anda a) osa eest 2 punkti.